



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В.
ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Лекции по курсу
Численные методы

Лектор
Н. И. Ионкин

Москва, 2015

Оглавление

§ 7	Интерполирование сплайнами	4
-----	--------------------------------------	---

§ 7 Интерполирование сплайнами

Интерполирование полиномом Лагранжа, а также полиномом Ньютона на всём отрезке ab с использованием большого числа узлов интерполяции сложно и часто приводит к плохому приближению. Чтобы избежать больших погрешностей, отрезок ab разбивают на частичные отрезки и на каждом из этих частичных отрезков проводят интерполяцию по небольшому числу узлов. Одним из способов интерполирования на всём отрезке является интерполирование с помощью сплайнов. Сплайном называют кусочно-полиномиальную функцию, определённую на отрезке ab и имеющую на этом отрезке некоторое число непрерывных производных.

Само слово "сплайн" (английское spline) означает гибкую планку типа металлической линейки. Такие планки используются при проведении гладких кривых через заданные точки плоскости. Мы не будем придавать слову "сплайн" какого-либо определённого технического смысла.

В этом параграфе мы рассмотрим частный, но распространённый в вычислительной практике случай, когда сплайн определяется с помощью полиномов третьей степени (так называемый кубический сплайн).

Пусть на ab задана достаточно гладкая функция $f(x)$. Введём сетку с узлами $\{x_i\}_0^N$, $x_0 = a$, $x_N = b$ и обозначим $f_i = f(x_i)$.

Определение. Интерполяционным кубическим сплайном, соответствующим данной функции $f(x)$ и данным узлам $\{x_i\}_0^N$ называется функция $S(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- A) на каждом сегменте $x_{i-1}x_i$, $i = \overline{1, N}$ функция $S(x)$ является многочленом третьей степени,
- B) функция $S(x)$, а также её первая и вторая производные непрерывны в узлах сетки,
- C) $S(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, N}$.

Утверждение. Кубический сплайн, определённый условиями A), B), C) существует и единственен.

Приведённое ниже доказательство содержит также один из способов построения этого сплайна.

На каждом из отрезков $\{x_{i-1} \ x_i\}_{i=1}^N$ будем искать функцию $S(x)$ в виде

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad (1)$$

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad i = \overline{1, N},$$

где a_i, b_i, c_i, d_i — коэффициенты, подлежащие определению.

При этом условие А), очевидно, выполнено. Из условия С) получаем, что $S_i(x_i) = a_i = f(x_i)$, $i = \overline{1, N}$. Доопределим, кроме того, $S_0(x_0) = a_0 = f(x_0)$. Далее, непрерывность функции $S(x)$ означает, что

$$S_i(x_{i-1}) = S_{i-1}(x_{i-1}), \quad i = \overline{1, N}.$$

Из этого равенства получаем уравнение

$$a_i + b_i(x_{i-1} - x_i) + c_i(x_{i-1} - x_i)^2 + d_i(x_{i-1} - x_i)^3 = a_{i-1}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Обозначим $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, N}$. Тогда, учитывая, что $a_i = f_i = f(x_i)$, полученные уравнения можно переписать в виде

$$h_i b_i - h_i^2 c_i + h_i^3 d_i = f_i - f_{i-1}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Из условия непрерывности первой производной получаем

$$S'_{i-1}(x_{i-1}) = S'_i(x_{i-1}), \quad i = \overline{2, N}.$$

Поскольку

$$S'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2,$$

приходим к уравнениям

$$2c_i h_i - 3d_i h_i^2 = b_i - b_{i-1}, \quad i = \overline{2, N}. \quad (3)$$

Точно так же условие непрерывности второй производной

$$S''_{i-1}(x_{i-1}) = S''_i(x_{i-1}), \quad \text{где } S''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i),$$

приводит к уравнениям

$$3h_i d_i = c_i - c_{i-1}, \quad i = \overline{2, N}. \quad (4)$$

Объединяя (2)–(4), получим систему $N+2(N-1) = 3N-2$ уравнений относительно $3N$ неизвестных $b_i, c_i, d_i, i = \overline{1, N}$.

Два недостающих уравнения можно получить, задавая те или иные граничные условия для $S(x)$. Предположим, например, что $f''(a) = f''(b) = 0$. Тогда естественно требовать, чтобы

$$S''(a) = S''(b) = 0.$$

Отсюда получаем,

$$\begin{aligned} S''(a) &= S''_1(x_0) = 2c_1 - 6h_1d_1 = 0, \\ S''(b) &= S''_N(x_N) = 2c_N = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $c_N = 0$.

Заметим, что условию $S''(a) = 0$ соответствует уравнение (4), если это уравнение записать при $i = 1$ и положить $c_0 = 0$. Таким образом, приходим к замкнутой системе уравнений для определения коэффициентов кубического сплайна

$$3h_id_i = c_i - c_{i-1}, \quad i = \overline{1, N}, c_0 = c_N = 0, \quad (5)$$

$$2h_ic_i - 3h_i^2d_i = b_i - b_{i-1}, \quad i = \overline{2, N}, \quad (6)$$

$$h_ib_i - h_i^2c_i + h_i^3d_i = f_i - f_{i-1}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (7)$$

Убедимся в том, что эта система имеет единственное решение. Исключая из (5)–(7) переменные $b_i, d_i, i = \overline{1, N}$, получим систему, содержащую только $c_i, i = \overline{1, N-1}$. Для этого рассмотрим два уравнения (7) при i и $i-1$

$$\begin{aligned} b_i &= h_ic_i - h_i^2d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \\ b_{i-1} &= h_{i-1}c_{i-1} - h_{i-1}^2d_{i-1} + \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}} \end{aligned}$$

и вычтем из первого уравнения второе

$$b_i - b_{i-1} = h_ic_i - h_{i-1}c_{i-1} - h_i^2d_i + h_{i-1}^2d_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}.$$

Подставляя найденное выражение для разности $b_i - b_{i-1}$ в правую часть уравнения (6), получим

$$h_ic_i + h_{i-1}c_{i-1} - 2h_i^2d_i - h_{i-1}^2d_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}. \quad (8)$$

Далее, из уравнения (5) получаем

$$h_i^2 d_i = \frac{h_i}{3}(c_i - c_{i-1}), \quad h_{i-1}^2 d_{i-1} = \frac{h_{i-1}}{3}(c_{i-1} - c_{i-2}),$$

так что уравнение (8) можно записать в виде

$$\frac{h_i}{3}c_i + \frac{2(h_{i-1} + h_i)}{3}c_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3}c_{i-2} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}.$$

Окончательно для нахождения c_i получаем систему уравнений

$$h_{i+1}c_{i+1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_i c_{i-1} = 3\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), \quad (9)$$

$$i = \overline{1, N-1}, \quad c_0 = c_N = 0.$$

Матрица при неизвестных в системе линейных алгебраических уравнений (9) является матрицей со строгим диагональным преобладанием. Следовательно, система (9) имеет единственное решение, которое можно найти, например, методом прогонки. По найденным коэффициентам c_i коэффициенты b_i и d_i определяются с помощью явных формул

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{3h_i}, \quad b_i = \frac{h_i}{3}(c_{i-1} + 2c_i) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Таким образом, доказано, что кубический сплайн, определяемый условиями А), В), С) и граничными условиями $S''(a) = S''(b) = 0$ существует и единственен.

Заметим, что вместо (9) можно получить системы уравнений, содержащие только b_i , либо только d_i , $i = \overline{1, N}$. Коэффициент b_i , как нетрудно видеть из (1), совпадает с первой производной функции $S(x)$ в узле x_i , в то время как $c_i = 0.5S''(x_i)$.

Свойства кубических сплайнов

Пусть $\{x_i\}_0^N$ — сетка, введённая на отрезке ab , $x_0 = a$, $x_N = b$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$ для $1 \leq i \leq N$. Оказывается, что при $h \rightarrow 0$ соответствующая последовательность сплайн-функций $S(x) = S_{h,f}(x)$

сходится равномерно к функции $f(x)$; более того, сходятся равномерно и последовательности $S'(x), S''(x), S'''(x)$. Это видно из следующих оценок, которые мы приводим без доказательства.

$$\begin{aligned}\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - S(x)| &\leq M_1 h^4, \\ \max_{a \leq x \leq b} |f'(x) - S'(x)| &\leq M_2 h^3, \\ \max_{a \leq x \leq b} |f''(x) - S''(x)| &\leq M_3 h^2, \\ \max_{a \leq x \leq b} |f'''(x) - S'''(x)| &\leq M_4 h.\end{aligned}$$

Здесь $M_i, i = 1, 2, 3, 4$ — постоянные, не зависящие от h . Приведённые оценки справедливы для любой $f(x) \in C^4 ab$.

Отметим ещё одно интересное свойство кубического сплайна. Рассмотрим следующую задачу. Дано множество H функций $U(x)$, обладающий свойствами

1. $\int_a^b \left(U''(x) \right)^2 dx < \infty$,
2. $U(x_i) = f_i, \quad i = \overline{0, N}, \quad f(x)$ — фиксированная функция,
3. $U''(a) = U''(b) = 0$.

Требуется найти функцию из данного множества, которая дала бы минимум функционалу $\int_a^b \left(U''(x) \right)^2 dx$.

Покажем, что такой функцией является кубический сплайн $S(x)$, то есть

$$\min_{u \in H} \int_a^b \left(U''(x) \right)^2 dx = \int_a^b \left(S''(x) \right)^2 dx. \quad (10)$$

Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(U''(x) \right)^2 dx - \int_a^b \left(S''(x) \right)^2 dx &= \\ &= \int_a^b \left(U''(x) - S''(x) \right)^2 dx + 2 \int_a^b U''(x) S''(x) dx - 2 \int_a^b \left(S''(x) \right)^2 dx.\end{aligned}$$

Запишем последние два слагаемых в виде

$$I = \int_a^b \left(U''(x) - S''(x) \right) S''(x) dx = \int_a^b \left(U'(x) - S'(x) \right)' S''(x) dx$$

и применим формулу интегрирования по частям

$$I = \left(U'(x) - S'(x) \right) S''(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \left(U'(x) - S'(x) \right) S'''(x) dx.$$

Подстановка обращается в нуль в силу условий $S''(a) = S''(b)$. Далее,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(U'(x) - S'(x) \right) S'''(x) dx &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(U'(x) - S'(x) \right) S_i'''(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^N 6d_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(U'(x) - S'(x) \right) dx = 6 \sum_{i=1}^N d_i \left(\left(U(x_i) - S(x_i) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(U(x_{i-1}) - S(x_{i-1}) \right) \right) = 0, \end{aligned}$$

так как $U(x_i) = S(x_i) = f_i$, $U(x_{i-1}) = S(x_{i-1}) = f_{i-1}$.

Таким образом, $I = 0$ и доказано тождество

$$\int_a^b \left(U''(x) \right)^2 dx = \int_a^b \left(S''(x) \right)^2 dx + \int_a^b \left(U''(x) - S''(x) \right)^2 dx, \quad (11)$$

справедливое для любой функции $U(x) \in H$. Из тождества (11) следует неравенство

$$\int_a^b \left(U''(x) \right)^2 dx \geq \int_a^b \left(S''(x) \right)^2 dx,$$

которое и означает, что минимум функционала $\int_a^b \left(U''(x) \right)^2 dx$ реализуется на функции $S(x)$.